# Examen Blanc N° 4 Pour Obtenir
## Diplôme Du Baccalauréat 2021 Ville ZAIO

| | | | |
|---|---|---|---|
| Matière | **Mathématiques** | Coeffici | 9 |
| Filière | **Science mathématiques (A) et (B)** | Durée | 4 |

بسم الله الرحمن الرحيم

- La durée de l'épreuve est de **4 heures** ;
- l'épreuve comporte **(5) pages** numérotées de 1/5 à 5/5 ;
- l'épreuve est composée de **quatre exercices** indépendants entre eux ;
- le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.

**L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**

- **Exercice 1** qui concerne **Arithmétique**........................... **04,00 points**
- **Exercice 2** qui concerne **les nombres complexes**.......... **04,00 points**
- **Exercice 3** qui concerne **Analyse** ................................. **02,50 points**
- **Exercice 4** qui concerne **Analyse** ................................... **09,50 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

Réalisés par : –Prof : Abdelali TAJJIOU
–Prof : Soufiane TAJJIOU

## Exercice 1 : (4,00 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$(E): a^2+b^3=7$$

***I-*** Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(E)$.

0.50 **1. a.** Montrer que : $b\equiv 1[2]$.

0.25 **b.** On pose : $b=2z+1$.

Montrer que : $a^2+1=(2-b)\times q$ tel que $q=4z^2+8z+7$.

0.25 **c.** Montrer que : $q\equiv 3[4]$.

**2.** Soit $q=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de $q$ en produit de facteurs premiers.

0.50 **a.** Montrer que : $(\forall i\in\{1,2,\cdots,r\});\ p_i\equiv 1[4]$ ou $p_i\equiv 3[4]$.

0.50 **b.** Monter qu'il existe $j\in\{1,2,\cdots,r\}$ tel que : $p_j\equiv 3[4]$.

0.50 **3. a.** En déduire qu'il existe un nombre premier $p$ qui vérifie : $\begin{cases} a^2+1\equiv 0[p] \\ p\equiv 3[4] \\ p\geq 3 \end{cases}$

0.75 **b.** En utilisant le théorème de **FERMAT** montrer que : $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1[p]$.

0.50 **c.** En déduire que : $p\equiv 1[4]$

0.25 ***II-*** Déduire des questions précédentes que l'équation $(E)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

## Exercice 2 : (4,00 points)

### Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$(E_\theta): z^2-2\left(i+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)z+2i\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ où } \theta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[.$$

0.50 **1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta)$.

0.50 **2.** Ecrire les solutions de $(E_\theta)$ sous la forme exponentielle

### Partie II:

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

on considère : $A$, $B$, $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2i$,
$z_1 = i + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $z_2 = i + e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

0.25 **1.** Montrer que $M_2$ est l'image de $M_1$ par la translation de vecteur :

$$\vec{w}\left(-2i\sin\left(\theta + \pi/4\right)\right).$$

0.75 **2. a.** Déterminer et construire l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{M(z) \in (P);\ \arg\left(\frac{z-2i}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$$

0.75 **b.** Montrer que lorsque $\theta$ varie sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$, chacun des points $M_1$ et $M_2$ varies sur l'ensemble $\Gamma$.

0.75 **c.** On suppose que : $\theta \in I = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ et soit $G$ le centre de gravité du triangle $AM_1M_2$.

Déterminer l'ensemble des points $G$ lorsque $\theta$ varie dans $I$.

0.50 **3.** Soit $M$ le point d'affixe $m$, tels que $m \in \mathbb{C} - \{0, 2i\}$ et $\theta \in I$.
Déterminer l'ensemble des points $M$ pour qu'ils soient appartient au cercle circonscrit au triangle $OBM_1$.

## Exercice 3 : (2,50 points)

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)}dx$

0.50 **1.** Justifier que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et calculer $I_0$ et $I_2$.

0.50 **2. a.** A l'aide d'un changement de variable, déterminer $I_1$.

0.25 **b.** Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

0.50 **3. a.** Montrer que : $(\forall n \geq 2);\ I_n \geq \int_{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)}dx \geq \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$.

0.25 **b.** En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

0.50 **4.** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.

# Exercice 4 : (9,50 points)

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$f(0)=0,\ f(1)=1 \text{ et } (\forall x\in]0,1[);\ f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$$

Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

## Partie I:

0.50 **1. a.** Montrer que la fonction $f$ est continue sur $[0,1]$.

0.25 **b.** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0.

**2.** Soit : $x\in]0,1[$.

0.25 **a.** Montrer que : $\int_x^1 \frac{(1-t)^2}{t}dt+\frac{(1-x)^2}{2}=x-1-\ln x$.

0.25 **b.** Montrer que : $\forall t\in[x,1];\ 0\le\int_x^1\frac{(1-t)^2}{t}dt\le\frac{(1-x)^3}{3x}$.

0.50 **c.** Montrer que : $\frac{x-1}{2\ln x}\le\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\le\frac{x-1}{2\ln x}-\frac{(x-1)^2}{3x\ln x}$.

0.50 **d.** En déduire que $f$ est dérivable à gauche en 1 et déterminer $f'_g(1)$.

0.50 **3. a.** Etudier le signe de la fonction $\varphi$ définie sur $]0,1]$ par $\varphi(x)=\frac{1}{x}-1+\ln x$.

0.25 **b.** Etudier les variations de la fonction $f$.

0.50 **c.** Tracer la courbe $(C_f)$. (On prend : $\|\vec{i}\|=1\ cm$).

## Partie II:

On considère la suite numérique $(\alpha_n)_{n\ge1}$ définie par :

$$\alpha_n=\int_{\frac{1}{1+n}}^{\frac{1}{n}}-\frac{(t-t^2)}{(1+t^2)f(t)}dt$$

0.25 **1.** Vérifier que : $(\forall n\ge1);\ \alpha_n=\int_{\frac{1}{1+n}}^{\frac{1}{n}}\frac{t\ln t}{1+t^2}dt$.

0.50 **2.** Montrer que pour tout $n\ge1$ on a : $\int_{\frac{1}{1+n}}^{\frac{1}{n}}t\ln t\,dt\le\alpha_n\le\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{1+n}}^{\frac{1}{n}}t\ln t\,dt$.

0.50 **3.** Calculer : $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$.

## Partie III:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \ et \ u_{n+1} = f(u_n); \ (\forall n \in \mathbb{N}) \\ v_n = \dfrac{1}{1-u_n}\displaystyle\int_{u_n}^{1} f(t)dt; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0.25 **1.** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < u_n < 1$.

0.50 **2.** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

0.50 **3.** En utilisant **le théorème de la moyenne**, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n < v_{n+1} < 1$ et donner : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

## Partie IV:

Soit $F$ et $G$ les deux fonctions définies sur $]0;1]$ par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt \quad et \quad G(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t}dt$$

0.50 **1. a.** Montrer que $F$ et $G$ sont dérivable sur $]0,1]$ et que :

$$(\forall x \in ]0,1]);\ F'(x) = G'(x) = -f(x).$$

0.25 **b.** Déduire que : $(\forall x \in ]0,1]);\ F(x) = G(x)$.

0.25 **2. a.** Montrer que : $(\forall x \in ]0,1[);\ \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt = \ln 2$.

0.75 **b.** Montrer que $(\forall x \in ]0,1[);\ |F(x) - \ln 2| \leq -\dfrac{x}{\ln x}$, puis déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

0.50 **3. a.** Montrer que pour tout $x$ de $]0,1[$ on a :

$$0 \leq \int_0^1 f(t)dt - F(x) \leq x$$

0.25 **b.** Déduire : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

0.25 **4. a.** Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$. On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

0.25 **b.** Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ représentative de $f^{-1}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.50 **c.** Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$, $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

**bonne chance !**
**29/05/2021**

**Fin du sujet**